Associazione per l'Insegnamento della Fisica — AIF — 31ª Edizione

Olimpiadi di Fisica 2017

PROGETTO OLIMPIADI

Gara di 2° livello

Giovedì 16 Febbraio 2017

Soluzioni

Quesiti

QUESITO n. 1

Sia r il raggio della cavità interna alla boa; il peso della boa e quello della massa d'acqua spostata sono uguali, dunque

$$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)\delta_{\mathrm{Fe}}\, g = \frac{2}{3}\pi R^3\, \delta_{\mathrm{a}}\, g \quad \Rightarrow \quad r = R\sqrt[3]{\frac{2\delta_{\mathrm{Fe}} - \delta_{\mathrm{a}}}{2\delta_{\mathrm{Fe}}}} = R\sqrt[3]{1 - \frac{\delta_{\mathrm{a}}}{2\delta_{\mathrm{Fe}}}} = 0.979\, R$$

essendo δ_{Fe} e δ_{a} rispettivamente le densità del ferro e dell'acqua. Quindi lo spessore s è

$$s = R - r = 0.021\, R = 1.7\,\mathrm{cm}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.3 \le s \le 2.1 \quad [\,\mathrm{cm}\,]}$

Soluzione approssimata: ponendo il volume del ferro pari a $4\pi R^2 s$ si ha

$$4\pi R^2\, s\, \delta_{\mathrm{Fe}}\, g = \frac{2}{3}\pi R^3\, \delta_{\mathrm{a}}\, g \quad \Rightarrow \quad s = \frac{1}{6}\, R\frac{\delta_{\mathrm{a}}}{\delta_{\mathrm{Fe}}} = 1.7\,\mathrm{cm}\,.$$

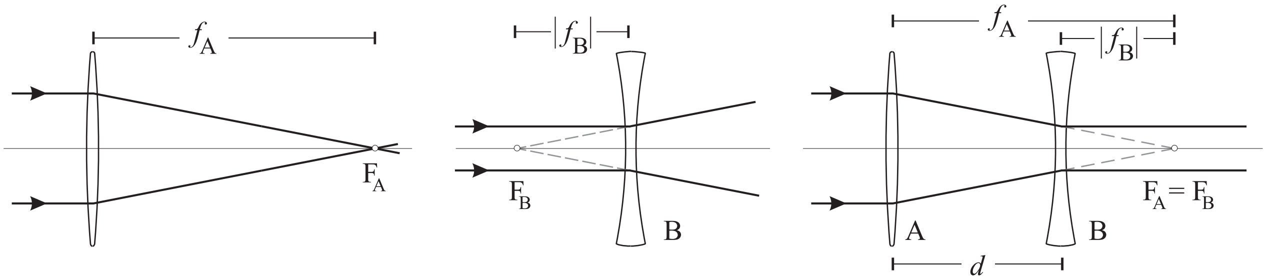
Alla stessa espressione di s si arriva anche usando l'approssimazione binomiale nella radice cubica

$$\sqrt[3]{1-x} \approx 1 - \frac{1}{3}x \quad \text{per} \quad x \ll 1\,.$$

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Attribuire punteggio pieno anche alle soluzioni ottenute con i metodi approssimati, purché entro il range indicato.*

QUESITO n. 2

I raggi che colpiscono la lente A, essendo paralleli all'asse ottico, convergono verso il suo secondo fuoco $\mathrm{F_A}$, come mostrato in figura a sinistra. D'altra parte raggi paralleli all'asse ottico che incidono su una lente divergente determinano un fascio di raggi uscenti divergenti i cui prolungamenti all'indietro passano per un fuoco della lente $\mathrm{F_B}$, come nella figura al centro; per il principio di reversibilità del cammino ottico, se la luce si propaga da destra a sinistra, cioè se i raggi uscenti sono paralleli vuol dire che il fascio incidente converge verso un fuoco della lente. Dunque rovesciando la figura al centro e facendo coincidere i fuochi delle due lenti si ottiene quanto asserito dal testo, come mostrato nella figura a destra.



In definitiva dunque A e B hanno un fuoco in comune, e questo significa che la loro distanza è pari alla somma algebrica delle lunghezze focali:

$$d = f_A + f_B = 15\,\text{cm}\,.$$

QUESITO n. 3

Sia h l'altezza finale dell'acqua. La conservazione del volume d'acqua impone

$$\pi r_1^2 h_0 = \pi(r_1^2 + r_2^2)h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{r_1^2}{r_1^2 + r_2^2} h_0 = \frac{1}{5}\, h_0 \quad \text{per} \quad r_2 = 2r_1\,.$$

L'energia potenziale gravitazionale di un sistema esteso è $U = mgh_{\text{CM}}$ dove h_{CM} è l'altezza del centro di massa la cui variazione è

$$\Delta h_{\text{CM}} = \frac{1}{2}h_0 - \frac{1}{2}h = \frac{2}{5}h_0 \quad \text{per cui l'energia dissipata è} \quad \Delta E = mg\Delta h_{\text{CM}} = \frac{2}{5}mgh_0 = \frac{2}{5}\pi\delta g r_1^2\, h_0^2 = 1.23\,\text{J}\,,$$

dove δ è la densità dell'acqua.

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{1.21 \le \Delta E \le 1.25 \quad [\,\text{J}\,]}$

QUESITO n. 4

Detta $E_0 = mc^2$ l'energia a riposo ed E l'energia totale, se $E = 2E_0$ vale la relazione:

$$\gamma mc^2 = 2mc^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{da cui} \quad v = c\frac{\sqrt{3}}{2} = 2.597 \times 10^8\,\text{m}\,\text{s}^{-1}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{2.597 \times 10^8 \le v \le 2.598 \times 10^8 \quad [\,\text{m}\,\text{s}^{-1}\,]}$

QUESITO n. 5

Quando il sistema è in rotazione l'accelerazione centripeta, $a_c = \omega^2 \ell$, è data dalla forza elastica $F_{\text{el}} = k(\ell - \ell_0)$, quindi

$$m\omega^2 \ell = k(\ell - \ell_0) \quad \Rightarrow \quad \ell = \frac{k\ell_0}{k - m\omega^2}\,.$$

NOTA: Si può osservare che l'equazione ammette una soluzione stabile $\ell > 0$ solo per $k > m\omega^2$ ovvero per una velocità angolare

$$\omega < \omega_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Per altro, immaginando di mettere in moto il sistema partendo da fermo e di far crescere lentamente la velocità angolare, passando per stati di equilibrio dinamico, si vede che per $\omega \to \omega_{\max}$ sia la lunghezza ℓ della molla che la quantità di energia da fornire al sistema tendono all'infinito. Non è dunque possibile avere un sistema dinamicamente stabile oltre quel limite di velocità angolare.

QUESITO n. 6

I tratti PM e MQ del filo hanno resistenza rispettivamente $2R/3$ e $R/3$ e sono in parallelo tra loro, cosicché la resistenza equivalente è

$$R_p = \frac{(2R/3)(R/3)}{R} = \frac{2}{9}R\,.$$ La resistenza R' è in serie a questo parallelo per cui deve essere

$$\frac{2}{9}R + R' = R \quad \Rightarrow \quad R' = \frac{7}{9}R = 63\,\Omega\,.$$

QUESITO n. 7

Quando le onde giungono vicino alla riva, cambia la loro velocità e di conseguenza la loro lunghezza d'onda dato che la frequenza rimane la stessa. Poiché arrivano 18 onde in 60 s, la frequenza è $\nu = 18/60\,\mathrm{s} = 0.30\,\mathrm{Hz}$.

La frequenza è legata alla velocità dalla relazione

$$v = \lambda\nu\,.$$

D'altra parte, la velocità delle onde al largo, dove la profondità del mare è maggiore della lunghezza d'onda, è legata a quest'ultima dalla relazione (data nel testo)

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$ Uguagliando queste due espressioni troviamo la relazione tra lunghezza d'onda e frequenza:

$$\lambda = \frac{g}{2\pi\nu^2} = 17.3\,\mathrm{m}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{17.2 \le \lambda \le 17.4 \quad [\,\mathrm{m}\,]}$

QUESITO n. 8

Poiché le velocità iniziali degli ioni sono perpendicolari al campo magnetico, le traiettorie sono archi di circonferenza e la distanza D è pari alla differenza dei diametri, $D = 2(R_2 - R_1)$.

Sugli ioni agisce la forza di Lorentz. Dalla seconda legge della dinamica si ricava allora $qvB = m\dfrac{v^2}{R}$, da cui $R = \dfrac{mv}{qB}$.

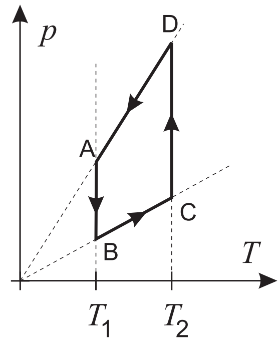
La distanza D è quindi $D = \dfrac{2v}{eB}(m_2 - m_1) = 2.30\,\mathrm{mm}\,.$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{2.29 \le D \le 2.31 \quad [\,\mathrm{mm}\,]}$

QUESITO n. 9

Il ciclo è composto da due isoterme e due isocore. Anche nel piano $p-T$ le isoterme sono ovviamente segmenti verticali. Per quanto riguarda le isocore, dall'equazione di stato dei gas perfetti si ha $p = nRT/V$, e dunque, a volume costante, la pressione è direttamente proporzionale alla temperatura assoluta. Ne segue che le isocore sono rappresentate da segmenti appartenenti a semirette spiccate dall'origine. La forma del ciclo è dunque quella rappresentata in figura.

Per individuare i punti, basta osservare che $V_\mathrm{A} < V_\mathrm{B}$ e di conseguenza $p_\mathrm{A} > p_\mathrm{B}$, e analogamente $p_\mathrm{D} > p_\mathrm{C}$.



NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Se il ciclo è rappresentato come un trapezio con i lati paralleli verticali e i punti nell'ordine giusto, ma i lati obliqui appartenenti a semirette che non partono dall'origine, attribuire 2 punti. Se invece il trapezio è corretto ma i punti non sono indicati attribuire 1 solo punto.*

QUESITO n. 10

Assumendo che il Sole irraggi uniformemente in tutte le direzioni, la potenza totale P irradiata è legata all'intensità J della radiazione, misurata a distanza r dal Sole, dalla relazione $P = 4\pi r^2 J$.

D'altra parte, se assumiamo che il Sole emetta come un corpo nero, per la legge di Stefan-Boltzmann P è anche data da $\sigma\,(4\pi R_\mathrm{S}^2)\,T^4$, dove T è la temperatura assoluta della fotosfera solare.

Si trova quindi:

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma\,(4\pi R_\mathrm{S}^2)}} = \sqrt[4]{\frac{J}{\sigma}\left(\frac{r}{R_S}\right)^2} = 5.81\,\mathrm{kK}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{5.78 \le T \le 5.84 \quad [\,\mathrm{kK}\,]}$

Problemi

PROBLEMA n. 1 – Camminando, con attrito, sui cilindri. . .

Parte A

Quesito n. 1.
Se t è il valore numerico del tempo misurato in secondi, la velocità in km/h si ottiene – esattamente – calcolando

$$v = \frac{100}{t}\,\mathrm{m/s} \times 3.6\,\frac{\mathrm{km/h}}{\mathrm{m/s}} = \frac{360}{t}\,\mathrm{km/h} = \frac{360}{60-\delta t}\,\mathrm{km/h} \quad \text{con} \quad \delta t = 60 - t$$

mentre, secondo quanto afferma B, per $\delta t \ll 60$ la velocità si può stimare come

$$v_{\mathrm{st}} = (6 + \delta t/10)\,\mathrm{km/h} \qquad \text{(v. la NOTA finale).}$$

L'errore relativo della stima è

$$\epsilon = \frac{v - v_{\mathrm{st}}}{v} = 1 - \frac{v_{\mathrm{st}}}{v} = 1 - \frac{60+\delta t}{10}\,\frac{60-\delta t}{360} = \frac{(\delta t)^2}{3600}\,.$$

La condizione imposta dà

$$\epsilon = \left(\frac{\delta t}{60}\right)^2 < \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta t}{60} < \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad \delta t < 6\,.$$

Quindi l'intervallo di tempo richiesto è $6\,\mathrm{s}$.

Quesito n. 2.
La corrispondente velocità massima è

$$v_{\max} = \frac{360}{54}\,\mathrm{km/h} = 6.67\,\mathrm{km/h} \qquad \text{RIS} \;\Rightarrow\; \boxed{6.66 \le v_{\max} \le 6.68 \quad [\,\mathrm{km/h}\,]}\,.$$

NOTA: Per completezza, ecco come B ha ottenuto l'espressione approssimata, per $\delta t \ll 60$:

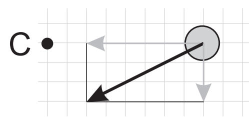
$$\frac{360}{60-\delta t}\,\mathrm{km/h} = \frac{360(60+\delta t)}{(60-\delta t)(60+\delta t)}\,\mathrm{km/h} = \frac{360(60+\delta t)}{3600-(\delta t)^2}\,\mathrm{km/h} \approx \frac{60+\delta t}{10}\,\mathrm{km/h} = (6+\delta t/10)\,\mathrm{km/h} = v_{\mathrm{st}}\,.$$

Parte B

Dal momento che la pedina resta ferma rispetto al disco, la forza d'attrito statico ha modulo certamente minore (al più uguale) di quello massimo $F_{\mathrm{a,max}} = \mu_{\mathrm{s}} m g$ e deve quindi essere determinata dalle condizioni dinamiche del moto.

L'accelerazione istantanea della pedina (nel riferimento inerziale del laboratorio) ha due componenti: quella centripeta $a_{\mathrm{c}} = \omega^2 r$ e quella tangenziale dovuta all'accelerazione angolare del disco $a_{\mathrm{t}} = \alpha r$. Poiché nel piano orizzontale sulla pedina agisce solo la forza d'attrito statico dovuta al disco che la sta trascinando, le due componenti dell'accelerazione non sono altro che le due componenti della forza d'attrito divise per la massa della pedina stessa.

Il rapporto tra tali componenti è $\rho = \dfrac{\alpha r}{\omega^2 r} = \dfrac{1}{2}$ e dunque la componente tangenziale della forza d'attrito è metà della forza centripeta mostrata nel testo. La figura da disegnare (a meno del disco) è quindi quella riportata qui a destra.



Che la condizione citata sopra sia soddisfatta può essere verificato utilizzando i dati numerici; infatti si ha

$$F_{\mathrm{a,max}} = \mu_{\mathrm{s}} m g = 100\,\mathrm{mN} \quad \text{mentre} \quad F_{\mathrm{a}} = \sqrt{F_{\mathrm{c}}^2 + F_{\mathrm{t}}^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\,F_{\mathrm{c}} \quad \text{essendo} \quad F_{\mathrm{t}} = \frac{1}{2}\,F_{\mathrm{c}}\,;$$

$$F_{\mathrm{c}} = m\omega^2 r = 22.3\,\mathrm{mN} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{a}} = 24.9\,\mathrm{mN}\,.$$

NOTA per i correttori $\Rightarrow$ *Al di là della qualità grafica del disegno, è richiesto quanto meno che le due componenti del vettore siano, almeno approssimativamente, ortogonali, che abbiano il verso giusto e, approssimativamente, il rapporto corretto delle lunghezze.*

Parte C

Il moto del centro di massa dei cilindri è uniformemente accelerato, con velocità iniziale nulla. Detta a l'accelerazione, v la velocità finale e t il tempo impiegato, essendo $s = 1/2\ at^2$ e $v = at$ si ricava $s = 1/2\ vt$ e dunque, a parità di percorso, il tempo è inversamente proporzionale alla velocità finale.

Si consideri un cilindro di massa m, raggio r e momento d'inerzia I, rispetto all'asse del cilindro; la condizione di puro rotolamento (senza strisciamento) tra la velocità angolare e quella lineare del centro di massa è data da $\omega = v/r$; usando questa, e indicando con h il dislivello tra la posizione iniziale e quella finale, la conservazione dell'energia si scrive:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)v^2 = \frac{1}{2}m\,(1+Z)\,v^2 \quad \text{avendo posto} \quad Z = \frac{I}{mr^2}\,.$$

Come detto, impiega più tempo il cilindro che ha v minore quindi il termine Z maggiore. Basterà quindi calcolare questo termine per i tre cilindri:

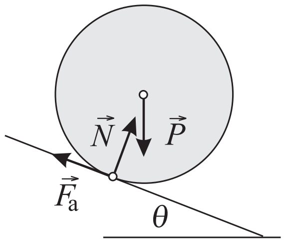
$$r_1 = R; \quad I_1 = mR^2 \quad \Rightarrow \quad Z_1 = 1;$$

$$r_2 = R/2; \quad I_2 = 1/8\ mR^2 \quad \Rightarrow \quad Z_2 = 1/8\ mR^2/(\,mR^2/4) = 1/2\,;$$

$$r_3 = R; \quad I_3 = 1/2\ mR^2 \quad \Rightarrow \quad Z_1 = 1/2\,;$$

dunque il cilindro che impiega più tempo è il primo.

Alternativamente, si può risolvere il problema in termini di equazioni del moto. Le forze che agiscono sul cilindro sono: il peso $\vec{P}$, la reazione normale $\vec{N}$ e l'attrito, statico non essendoci strisciamento, $\vec{F}_\mathrm{a}$, mostrate in figura.



La prima equazione cardinale si scrive

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_\mathrm{a} = m\vec{a}$$

la cui componente nella direzione parallela al piano inclinato è

$$mg\ \mathrm{sen}\,\theta - F_\mathrm{a} = ma$$

dove θ è l'inclinazione del piano inclinato. La seconda equazione cardinale si scrive

$$\tau = I\alpha$$

dove τ è il modulo del momento risultante, calcolato rispetto al centro di massa e α l'accelerazione angolare; quest'ultima è legata al modulo dell'accelerazione e al raggio del cilindro dalla relazione $\alpha = a/r$ per la condizione di puro rotolamento.

Per quanto riguarda il momento delle forze, sia $\vec{P}$ sia $\vec{N}$ hanno momento nullo rispetto al centro di massa, e dunque il modulo del momento risultante è $\tau = F_\mathrm{a}\, r$. Tenendo conto di quanto detto, la seconda equazione cardinale si può scrivere

$$F_\mathrm{a}\, r = Ia/r\,.$$

Ricavando F_a da questa espressione e sostituendola nella prima si ottiene

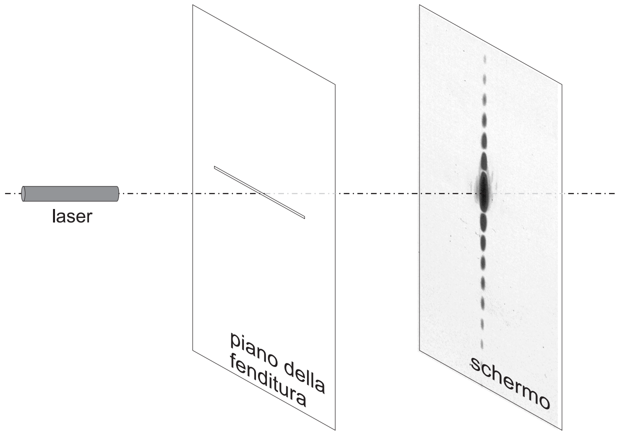
$$mg\ \mathrm{sen}\,\theta - \frac{I}{r^2}\,a = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g\ \mathrm{sen}\,\theta}{1 + I/(mr^2)} = \frac{g\ \mathrm{sen}\,\theta}{1+Z} \quad \text{con} \quad Z = \frac{I}{mr^2} \quad \text{come prima.}$$

Dalla legge oraria già citata ($s = 1/2\ at^2$) si deduce che, a parità di percorso, il tempo impiegato è inversamente proporzionale a $\sqrt{a}$; si giunge quindi alla medesima conclusione.

PROBLEMA n. 2 – Laser e fenditura

Quesito n. 1.

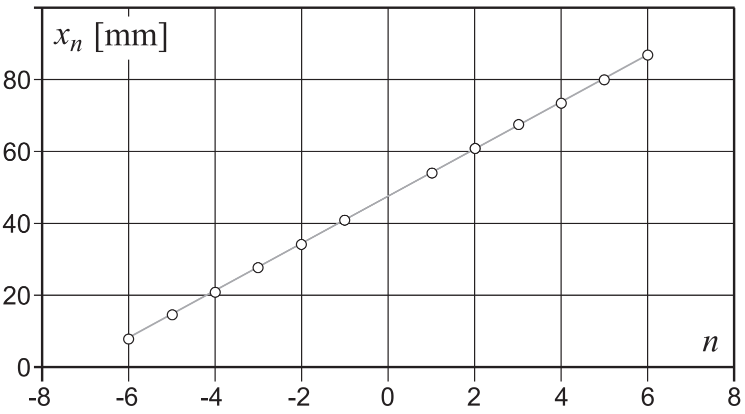
Gli elementi essenziali da aggiungere allo schema proposto sono due: il laser, il cui asse ottico (perpendicolare allo schermo) passa per il centro della figura di diffrazione; la fenditura, che deve essere collocata sul percorso del fascio e deve essere disposta orizzontalmente per produrre una figura di diffrazione verticale.



Quesito n. 2.

Ponendo, per esempio, lo zero dell'asse orizzontale all'estrema sinistra della figura di diffrazione, le posizioni dei minimi sono quelle riportate in tabella e nel grafico a fianco.

N. ordine	Posizione [mm]
-6	$x_{-6} = 8.00$
-5	$x_{-5} = 14.75$
-4	$x_{-4} = 21.00$
-3	$x_{-3} = 27.75$
-2	$x_{-2} = 34.25$
-1	$x_{-1} = 41.00$
1	$x_1 = 54.25$
2	$x_2 = 61.00$
3	$x_3 = 67.50$
4	$x_4 = 73.75$
5	$x_5 = 80.00$
6	$x_6 = 87.00$



Se le misure di posizione sono fatte con accuratezza i punti risultano ben allineati; in ogni caso è possibile tracciare a mano la retta che approssima meglio l'andamento del grafico (*best fit*) e determinarne poi la pendenza $m = 6.58\,\text{mm}$; questa corrisponde alla distanza Δx tra i minimi adiacenti.

Nota: *Il fatto che i punti vengano ben allineati consente di determinare la distanza tra minimi adiacenti anche come media delle distanze ovvero come*

$$\Delta x = \frac{x_6 - x_{-6}}{12} = 6.58\,\text{mm}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{6.42 \le \Delta x \le 6.74 \quad [\,\text{mm}\,]}$

Quesito n. 3.

Nella figura di diffrazione i minimi si formano nelle direzioni che, rispetto al fascio incidente, formano angoli tali che

$$a \,\text{sen}\,\theta_n = \pm n\lambda\,. \tag{1}$$

Poiché gli angoli in gioco sono piccoli si può approssimare $\text{sen}\,\theta_n$ con $\tan\theta_n = (x_n - x_0)/D$ dove x_0 è la posizione del centro della figura. Per due minimi consecutivi sarà quindi

$$a\frac{\Delta x}{D} = \lambda \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\lambda D}{\Delta x} = 144\,\mu\text{m}$$

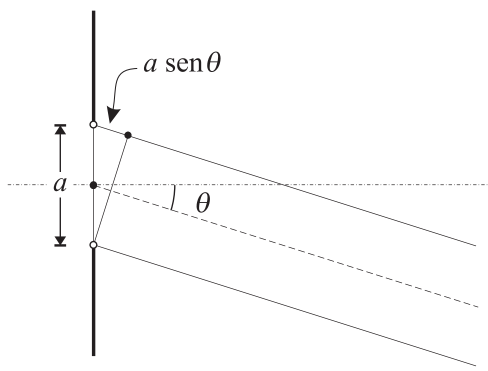
RIS $\Rightarrow$ $\boxed{141 \le a \le 148 \quad [\,\mu\text{m}\,]}$.

Quesito n. 4.

Per il principio di Huygens, ciascun punto della fenditura agisce come una sorgente secondaria di onde monocromatiche, ciascuna delle quali è descritta da una funzione sinusoidale di fase $\varphi = kr - \omega t + \varphi_0$, dove $k = 2\pi/\lambda$ è il numero d'onda, $\omega = 2\pi\nu$ la pulsazione e φ_0 una costante. Quando arrivano in un dato punto dello schermo, onde provenienti da punti diversi della fenditura sono sfasate perché hanno percorso cammini diversi. Il loro sfasamento è

$$\Delta\varphi = k\Delta r = 2\pi\frac{\Delta r}{\lambda} \tag{2}$$

dove Δr è la differenza di percorso tra le due onde. In particolare, per le onde provenienti dai bordi opposti della fenditura, poiché $D \gg a$ risulta con ottima approssimazione $\Delta r = a\,\text{sen}\,\theta$ (v. figura a lato), dunque



$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{a}{\lambda}\,\text{sen}\,\theta\,. \tag{3}$$

Ma per la (1) nei punti di minimo $a\,\text{sen}\,\theta = \pm n\lambda$, e dunque in tali punti

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{(\pm n\lambda)}{\lambda} = \pm 2n\pi\,.$$

NOTA: Può sembrare paradossale che là dove questa differenza di fase è un numero intero di 2π rad e quindi i due raggi considerati interferiscono *costruttivamente* si abbia un minimo. La soluzione dell'apparente paradosso sta ovviamente nel fatto che sullo schermo arrivano i raggi provenienti da *tutta* la fenditura, e non solo quelli provenienti dai bordi, e occorre considerare l'interferenza tra *tutti* questi raggi. Si dimostra allora che, nei punti dello schermo in cui la (1) è soddisfatta, i raggi provenienti dai vari punti della fenditura interferiscono *distruttivamente* a due a due: è per questa ragione che in quei punti si ha un minimo.

Quesito n. 5.

Per $\theta \ll 1\,\mathrm{rad}$, nella (3) possiamo approssimare $\operatorname{sen}\theta$, quindi

$$\Delta\varphi(\mathrm{P}) = 2\pi \frac{a}{\lambda}\frac{X_\mathrm{P}}{D} \tag{4}$$

dove X_P è la distanza tra il punto P e il centro del massimo centrale.

La (4) mostra che $\Delta\varphi(\mathrm{P})$ è proporzionale a X_P, e poiché essa, per quanto visto al punto 4, vale 2π in corrispondenza del primo minimo, e 4π in corrispondenza del secondo, ne segue che nel punto medio tra i due varrà

$$\Delta\varphi(\mathrm{P}) = 3\pi = 9.42\,\mathrm{rad}\,.$$

Alternativamente la differenza di fase si può calcolare direttamente dalla formula (4) valutando X_P; per questo ci sono almeno tre modi:

- stimando a occhio i centri delle "macchie"; nello stesso sistema di riferimento usato sopra, la coordinata del punto centrale può essere data come $x_0 = 48\,\mathrm{mm}$, mentre quella del punto P è $x_\mathrm{P} = 57.5\,\mathrm{mm}$ da cui $X_\mathrm{P} = x_\mathrm{P} - x_0 = 9.5\,\mathrm{mm}$;
- usando i dati della tabella: per il massimo centrale si ha $x_0 = (x_{-1} + x_1)/2 = 47.625\,\mathrm{mm}$; per il punto P, invece, $x_\mathrm{P} = (x_1 + x_2)/2 = 57.625\,\mathrm{mm}$ da cui $X_\mathrm{P} = 10.0\,\mathrm{mm}$;
- calcolando direttamente X_P in termini di Δx trovato sopra: $X_\mathrm{P} = 1.5\,\Delta x = 9.87\,\mathrm{mm}\,.$

  I valori di $\Delta\varphi(\mathrm{P})$ risultano rispettivamente $9.06, 9.53$ e $9.41\,\mathrm{rad}\,.$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{9.0 \le \Delta\varphi(\mathrm{P}) \le 9.6}$

PROBLEMA n. 3 – Moto di cariche

Quesito n. 1.

In situazione di equilibrio della sferetta superiore si ha

$$\frac{kQ_1Q_2}{d_0^2} = mg \quad \Rightarrow \quad kQ_1Q_2 = 4kQ^2 = mgd_0^2 \quad \text{dove} \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,;$$

$$Q = \sqrt{\frac{mg}{4k}}\,d_0 = 52.2\,\mathrm{nC}\,. \tag{1}$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{52.1 \le Q \le 52.4 \quad [\mathrm{nC}]}$

Quesito n. 2.

La minima distanza si raggiunge quando la velocità della prima sferetta è nulla. In tale situazione, dalla conservazione dell'energia, si ottiene

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{4kQ^2}{d_0} = \frac{4kQ^2}{d} + mg(d_0 - d)\,,$$

avendo indicato con d la minima distanza tra le sferette. Sviluppando i calcoli ed utilizzando la (1), si ricava

$$\frac{v_0^2}{2gd_0} = \frac{d_0}{d} - \frac{d}{d_0} \quad \Rightarrow \quad 2g\,d^2 + v_0^2\,d - 2g\,d_0^2 = 0 \quad \text{da cui}$$

$$d = \frac{-v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + 16g^2d_0^2}}{4g} = \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{4g}\right)^2 + d_0^2} - \left(\frac{v_0^2}{4g}\right) = d_0\left[\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{4gd_0}\right)^2 + 1} - \frac{v_0^2}{4gd_0}\right] = 4.09\,\mathrm{cm}\,.$$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{4.05 \le d \le 4.11 \quad [\mathrm{cm}]}$

Quesito n. 3.

Poiché sul sistema composto dalle due sferette non agiscono forze dissipative, l'energia totale del sistema, E, si conserva. Indicando con U_g e U_e rispettivamente l'energia potenziale gravitazionale ed elettrostatica, e con K quella cinetica, abbiamo

$$E = K + U_\mathrm{g} + U_\mathrm{e} = \text{costante}.$$

L'energia cinetica si può esprimere come la somma di due termini: quella che si avrebbe se tutta la massa fosse concentrata nel centro di massa (CdM) e quella del moto relativo al CdM:

$$K = \frac{1}{2}\,m{v'_1}^2 + \frac{1}{2}\,m{v'_2}^2 + \frac{1}{2}\,(2m)V^2\,,$$

dove le v'_i indicano le velocità nel sistema del CdM e V la velocità del CdM.

L'energia potenziale gravitazionale si può scrivere come

$$U_\mathrm{g} = 2\,mg\,z_\mathrm{CM}\,,$$

dove z_CM è la quota del CdM.

Per quanto detto, risulta:

$$E = \frac{1}{2}\,m{v'_1}^2 + \frac{1}{2}\,m{v'_2}^2 + \frac{1}{2}\,(2m)V^2 + 2\,mg\,z_\mathrm{CM} + \frac{4kQ^2}{d} = \text{costante},$$

avendo indicato con d la distanza tra le due sferette.

La somma $1/2\,(2m)V^2 + 2mgz_\mathrm{CM}$ rappresenta l'energia meccanica che avrebbe il sistema se fosse un corpo unico. Poiché le forze esterne (i pesi delle sferette) sono conservative, questa energia si conserva. Ne segue che si conserva anche la somma dei restanti termini:

$$U_\mathrm{int} = \frac{1}{2}\,m{v'_1}^2 + \frac{1}{2}\,m{v'_2}^2 + \frac{4kQ^2}{d} \tag{2}$$

che rappresenta l'energia interna del sistema.

Nella situazione iniziale $v'_1 = -v'_2 = v_0/2$ e quindi

$$U_\mathrm{int,0} = \frac{mv_0^2}{4} + \frac{4kQ^2}{d_0}\,.$$

Nella situazione di massimo avvicinamento $v'_1 = v'_2 = 0$ e dunque

$$U_\mathrm{int,0} = \frac{4kQ^2}{d}\,.$$

Uguagliando le due espressioni si trova

$$d = \frac{1}{mv_0^2/(16kQ^2) + 1/d_0}\,.$$

Ricordando che $Q = \sqrt{\dfrac{mgd_0^2}{4k}}$ si ottiene $d = \dfrac{d_0}{v_0^2/(4d_0g) + 1} = 4.95\,\mathrm{cm}\,.$

RIS $\Rightarrow$ $\boxed{4.94 \le d \le 4.96 \quad [\,\mathrm{cm}\,]}$

Alternativamente, ci si può mettere nel sistema di riferimento del CdM. Per il *Principio di Equivalenza*, un tale sistema è equivalente a un sistema inerziale in cui la gravità è assente. In tale sistema, l'energia (che si conserva perché non ci sono forze dissipative) è data dall'espressione (2) e si giunge quindi alla medesima conclusione.

Materiale elaborato dal Gruppo